

УДК 621.311

Ягуп В. Г., Ягуп Е. В.

ФОРМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ЦЕПЕЙ С РЕЗИСТИВНЫМ ПРЕВАЛИРОВАНИЕМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Электрические системы в динамических режимах исследуются путем интегрирования дифференциальных уравнений, сформированных по методу переменных состояния [1–3]. Такой подход используется в подавляющем большинстве моделирующих программных комплексов, в том числе и в системе SimPowerSystems средства компьютерной математики MATLAB [4]. В моделирующих программах на основании топологии формируются уравнения состояния, которые получают и решают в численном виде с помощью матричных преобразований. В тех случаях, когда требуется получить уравнения состояния в символьном виде, возникает ряд затруднений, в частности в случае резистивного превалирования. Последнее приводит к достаточно громоздким выражениям для коэффициентов дифференциальных уравнений, выражаемых через величины этих сопротивлений резисторов.

Целью статьи является применение топологического метода для формирования дифференциальных уравнений электрических систем по методу переменных состояния. Использование топологической формулы Мейсона позволит упростить определение коэффициентов уравнений состояния, затратить для выводов меньше времени в сравнении с любыми другими методами и получить ответ в компактной форме [4].

К переменным состояния в линейной электрической цепи можно относить напряжения на конденсаторах и токи через индуктивности. Именно эти электрические величины определяют запас энергии в электрической системе. Если переменные состояния объединить в матричный вектор X , а задающие величины источников электрической энергии представить в виде вектора Q , то для линейной системы уравнения состояния представляются в форме:

$$\frac{dX}{dt} = AX + BQ,$$

где A и B – соответственно квадратная системная матрица и прямоугольная матрица воздействия источников электрической энергии. Определение коэффициентов матриц A и B и представляет собой по существу задачу формирования уравнений состояния.

В качестве примера рассмотрим систему второго порядка, изображенную на рис. 1.

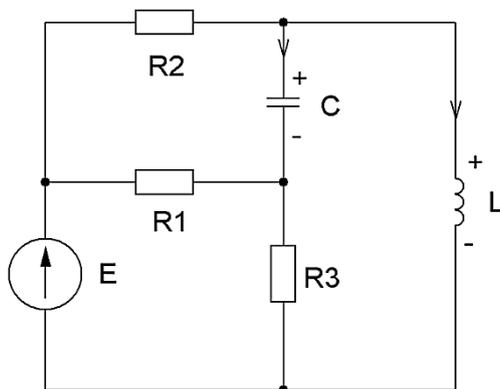


Рис. 1. Пример схемы с резистивным превалированием

Уравнения состояния для этой системы в матричной форме можно представить в форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \times V_E$$

Компонентные уравнения для элементов, которые являются физическими носителями переменных состояния, подставим в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV_C}{dt} &= \frac{1}{C} i_C; \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} V_L. \end{aligned}$$

Таким образом, можно считать, что коэффициенты матриц A и B представляют собой количественные оценки влияния на токи конденсаторов и напряжения индуктивностей со стороны самих переменных состояния и источников электрической энергии, причем эти токи конденсаторов и напряжения индуктивностей должны быть промасштабированы множителями $\frac{1}{C}$ и $\frac{1}{L}$ для перевода их к значениям производных переменных состояния. Следовательно, немасштабированные коэффициенты представляют собою соответствующие отношения той части тока конденсатора или напряжения на индуктивности, которая вносится соответствующей переменной состояния или источником электрической энергии, к величине самой переменной состояния или мгновенному значению задающей величине источника. Эти величины в зависимости от конкретного положения имеют размерности сопротивления или проводимости, либо безразмерны.

Для линейных электрических цепей определение немасштабированных коэффициентов может быть осуществлено на основе метода суперпозиции с помощью топологического метода по эквивалентной расчетной схеме.

Для составления эквивалентной расчетной схемы следует:

- а) каждый конденсатор заменить источником напряжения с соответствующей полярностью;
- б) каждую индуктивность заменить источником тока, соответствующим образом направленного;
- в) последовательно с источником напряжения, заменяющим конденсатор, включаем измеритель тока;
- г) параллельно источнику тока, заменяющего индуктивность, включаем измеритель напряжения

Для определения каждого ненормированного коэффициента в соответствии с принципом суперпозиции в расчетной схеме оставляем лишь один источник и один измерительный прибор.

Остальные приборы и источники деактивируем:

- а) источники напряжения и амперметры закорачиваем;
- б) источники тока и вольтметры исключаем (размыкаем).

При этом остается схема для определения частичного ненормированного коэффициента для производной переменной состояния элемента. Эта доля соответствует вкладу оставшегося источника, в качестве которого выступает либо источники электрической энергии (для матриц B),

либо источники, соответствующие запасам электрической энергии реактивных элементов, обуславливающие переменные состояния (для матрицы A). Вычисляемый вклад определяется показателем соответствующего измерительного прибора.

Производя указанные действия над исходной схемой, получим расчетную схему для определения коэффициентов уравнений состояния (рис. 2).

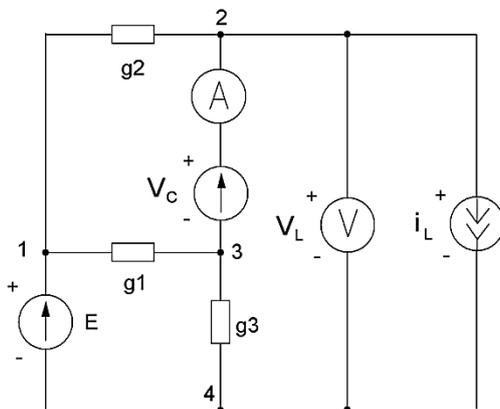


Рис. 2. Эквивалентная схема для топологического анализа

Определение коэффициента производится по формуле Мейсона [5, 6]:

$$T_{sm} = \frac{m}{s} = \frac{\sum p_i \Delta_i}{\Delta},$$

где m – показания измерительного прибора;

s – величина, задаваемая источником;

p_i – величины путей передачи;

Δ_i – алгебраические дополнения соответствующих путей передачи;

Δ – определитель ненаправленного графа, полученного после исключения источника и измерительного прибора.

На рис. 3, а–е изображены эквивалентные расчетные ненаправленные графы для определения всех ненормированных коэффициентов матриц A и B .

Для графа на рис. 3, а:

$$p_1 = -g_2(g_1 + g_3); \quad \Delta_1 = 1; \quad \Delta = g_1 + g_2 + g_3;$$

$$\frac{i_C}{V_C} = \frac{-g_2(g_1 + g_3)}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Для графа на рис. 3, б:

$$p_1 = -(g_1 + g_2); \quad \Delta_1 = 1;$$

$$\frac{i_C}{i_L} = \frac{-(g_1 + g_2)}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Для графа на рис. 3, в:

$$p_1 = g_2 g_3; \quad \Delta_1 = 1;$$

$$\frac{i_C}{E} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

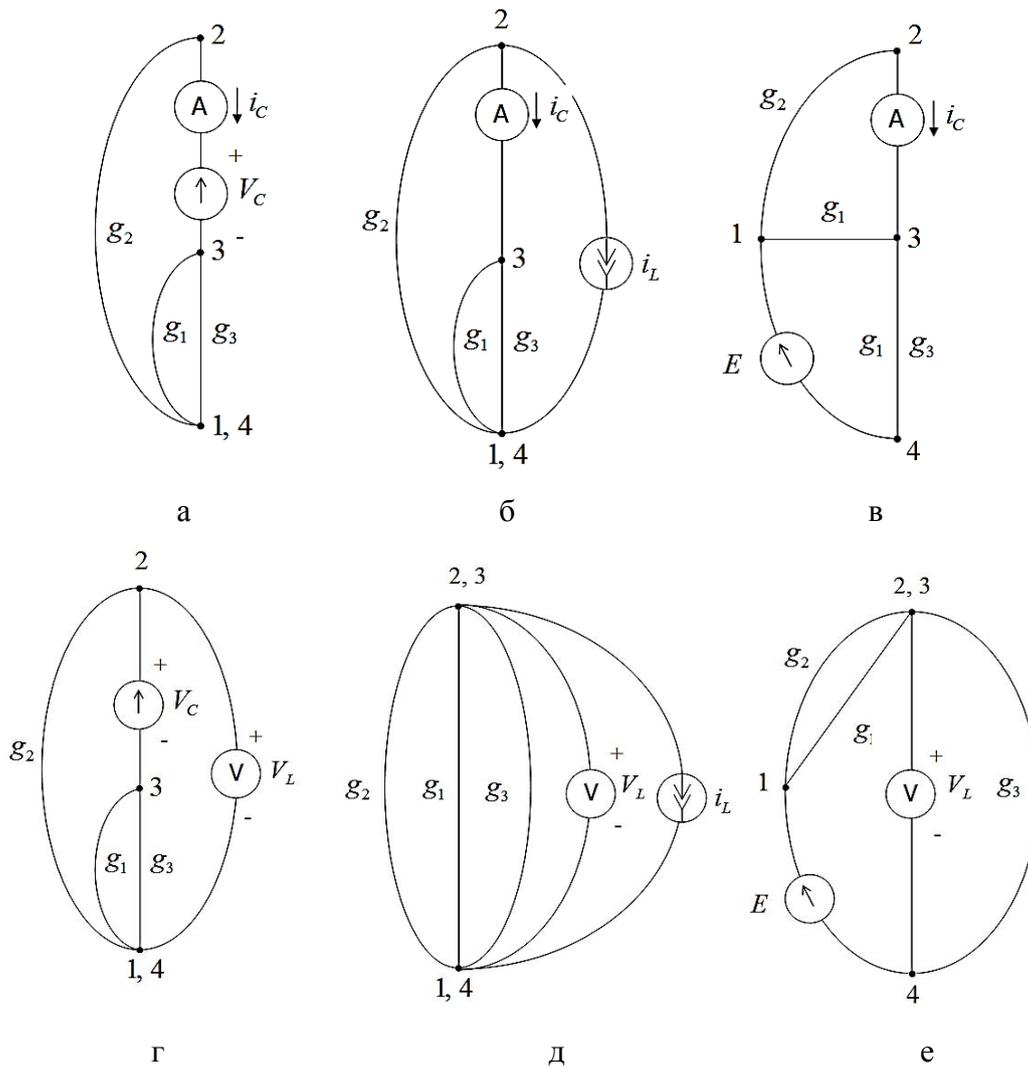


Рис. 3. Графы с приборами и источниками для вычислений коэффициентов уравнений

Для графа на рис. 3, г:

$$p_1 = g_1 + g_3; \Delta_1 = 1;$$

$$\frac{V_L}{V_C} = \frac{g_1 + g_3}{g_1 + g_2 + g_3}$$

Для графа на рис. 3, д:

$$p_1 = -1; \Delta_1 = 1;$$

$$\frac{V_L}{i_L} = -\frac{1}{g_1 + g_2 + g_3}$$

Для графа на рис. 3, е:

$$p_1 = g_1 + g_2; \Delta_1 = 1;$$

$$\frac{V_L}{E} = \frac{g_1 + g_2}{g_1 + g_2 + g_3}$$

С учетом нормировочных коэффициентов $\frac{1}{C}$ и $\frac{1}{L}$ соответственно для $\frac{dV_C}{dt}$ и $\frac{di_L}{dt}$, получим следующую систему уравнений по методу переменных состояния:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{g_2(g_1 + g_3)}{C(g_1 + g_2 + g_3)} & -\frac{g_1 + g_2}{C(g_1 + g_2 + g_3)} \\ \frac{g_1 + g_3}{L(g_1 + g_2 + g_3)} & -\frac{1}{L(g_1 + g_2 + g_3)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{g_2 g_3}{C(g_1 + g_2 + g_3)} \\ \frac{g_1 + g_2}{L(g_1 + g_2 + g_3)} \end{bmatrix} \times E$$

Нормирующие множители и определитель могут быть вынесены за скобки, тогда матричное уравнение может быть представлено в виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_1 + g_2 + g_3} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} -g_2(g_1 + g_3) & -(g_1 + g_2) \\ g_1 + g_3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_2 g_3 \\ g_1 + g_2 \end{bmatrix} \times E \right)$$

На рис. 4 приведен рабочий лист MathCAD, на котором осуществлен расчет динамического процесса с помощью метода Эйлера при параметрах $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $L = 0,01$ Гн, $C = 0,01$ Ф.

Исходные данные и начальные значения

$R_1 := 1$ $R_2 := 2$ $R_3 := 3$ $E := 100$ $L := 0.01$ $C := 0.01$
 $g_1 := \frac{1}{R_1} = 1$ $g_2 := \frac{1}{R_2} = 0.5$ $g_3 := \frac{1}{R_3} = 0.333$
 $I_{L0} := 0$ $V_{C0} := 0$ $dlt := 0.0001$ $t := 0..10000$

Системная матрица

$$A := \begin{bmatrix} \frac{-g_2 \cdot (g_1 + g_3)}{C \cdot (g_1 + g_2 + g_3)} & \frac{-g_1 - g_2}{C \cdot (g_1 + g_2 + g_3)} \\ \frac{g_1 + g_3}{L \cdot (g_1 + g_2 + g_3)} & \frac{-1}{L \cdot (g_1 + g_2 + g_3)} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{g_2 \cdot g_3}{C \cdot (g_1 + g_2 + g_3)} \\ \frac{g_1 + g_2}{L \cdot (g_1 + g_2 + g_3)} \end{bmatrix}$$

Расчет переменных состояния

$$\begin{pmatrix} V_{C_{t+1}} \\ I_{L_{t+1}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} V_{C_t} \\ I_{L_t} \end{pmatrix} + dlt \cdot \left[A \cdot \begin{pmatrix} V_{C_t} \\ I_{L_t} \end{pmatrix} + B \cdot E \right]$$

Рис. 4. Расчетный лист MathCAD с расчетом процессов по полученным уравнениям

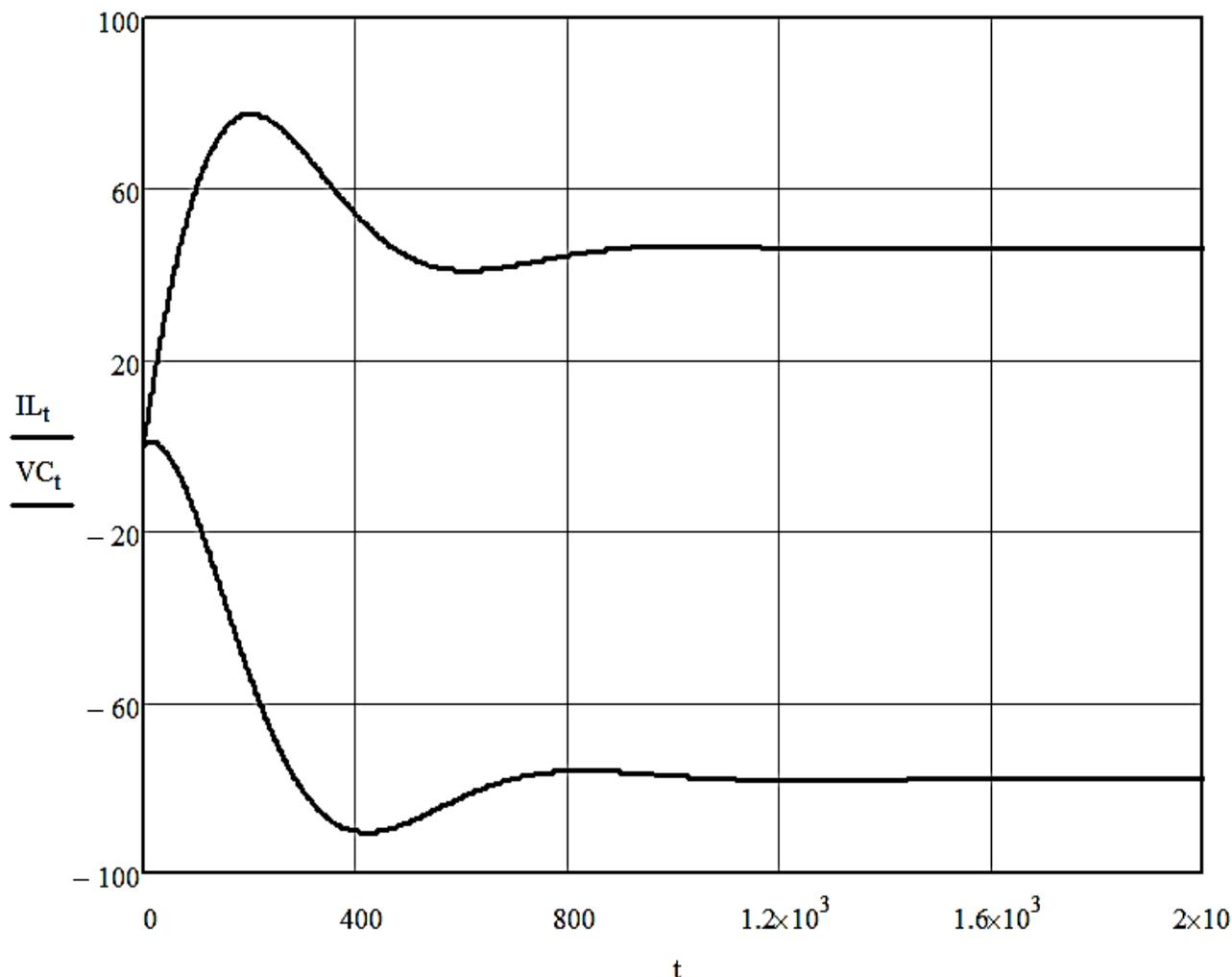


Рис. 5. Диаграммы процессов, вычисленных по полученным уравнениям

ВЫВОДЫ

Использование топологического метода позволяет существенно сократить затраты времени на определение коэффициентов уравнений состояния. При этом результаты выражаются через проводимости резистивных элементов, что соответствует более компактной форме по сравнению с выражениями через сопротивления резистивных элементов. Поскольку определитель для всех коэффициентов имеет один и тот же вид, он вычисляется лишь однажды. Поэтому топологический анализ практически сводится к определению лишь путей передачи и их алгебраических дополнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заде Л. Теория линейных систем / Л. Заде, И. Дезоер. – М. : Наука, 1970. – 620 с.
2. Чуа Л. О. Машинный анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы) / Л. О. Чуа, Лин Пен-Мин. – М. : Энергия, 1980. – 640 с.
3. Сигорский В. П. Алгоритмы анализа электронных схем / В. П. Сигорский. – М. : Сов. радио, 1976. – 608 с.
4. Долбня В. Т. В защиту метода графов / В. Т. Долбня // Электричество. – 1970. – № 1. – С. 85–88.
5. Мэзон Г. Электронные цепи, сигналы и системы / Г. Мэзон, Г. Циммерман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1963. – 619 с.
6. Сешу С. Линейные графы и электрические цепи / С. Сешу, М. Б. Рид. – М. : Высшая школа, 1971. – 448 с.

Статья поступила в редакцию 24.12.2012 г.